ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1994

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION PHYSIQUE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

Dans tout le problème, pour $n = 2, 3$ on désigne par $\mathbb{R}^n$ l'espace vectoriel réel de dimension n muni de ses structures euclidienne et affine canoniques et par O l'élément nul de cet espace, origine du repère affine orthonormal canonique.

Etant donnés deux intervalles ouverts non vides I_1 et I_2 de $\mathbb{R}$, et deux arcs paramétrés $\gamma_1 : I_1 \to \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : I_2 \to \mathbb{R}^2$ de classe C^1 réguliers, dont les supports se rencontrent en un point $A = \gamma_1(x_1) = \gamma_2(x_2)$, on appelle angle de γ_1 avec γ_2 en A l'angle orienté des deux vecteurs tangents unitaires $\overrightarrow{t_1}(x_1)$ et $\overrightarrow{t_2}(x_2)$ à ces deux arcs au point A .

I

1. Soit $a \in]0, +\infty[$ une valeur fixée et $\varrho_0 \in]0, +\infty[$ un paramètre. Etudier l'arc paramétré plan γ_{ϱ_0} défini par l'équation polaire : $\varrho(\theta) = \varrho_0 e^{a\theta}$.

Soit $\mathbf{C}_{\{a\}}$ l'ensemble des arcs paramétrés γ de classe C^1 réguliers à support dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ qui en tout point $M = \gamma(x)$ font avec la demi-droite orientée $\overrightarrow{OM}$ l' angle constant α tel que cotan $\alpha = a$. Montrer que cet ensemble est constitué des arcs γ_{ϱ_0} précédents, ϱ_0 variant dans $]0, +\infty[$.

Déterminer à quelle condition les supports de deux arcs γ_1 et γ_2 de $\mathbf{C}_{\{a\}}$ ont une intersection non vide, et vérifier qu'alors ces supports sont égaux.

2. Avec les notations de la question précédente, on considère un arc γ_1 de $\mathbf{C}_{\{a\}}$ qui passe par le point $A = (1, 0)$. Déterminer le centre de courbure C en un point M de cet arc et vérifier que les droites OC et OM sont orthogonales. En déduire que la développée de γ_1 est un arc de $\mathbf{C}_{\{a\}}$ et déterminer une équation polaire de cette développée.

3. Déterminer les arcs paramétrés γ de classe C^2 à support dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ possédant la propriété $(\mathcal{P})$ suivante :
$(\mathcal{P})$: En tout point $M = \gamma(x)$, le centre de courbure C est tel que les droites OC et OM sont orthogonales.

II

On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{O\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x,y) = \left(X = \frac{x^2-y^2}{2\sqrt{x^2+y^2}}, Y = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, Z = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{x^2+y^2})\right) .$$

1. Montrer que F définit une nappe paramétrée S de classe C^1 dont le support est contenu dans une surface quadrique Σ de $\mathbb{R}^3$ dont on précisera la nature, l'équation cartésienne et les caractéristiques (sommet et axe).

2. On oriente le plan tangent Π_M à S en un point $M = F(x,y)$ de cette nappe de telle manière que les vecteurs $\vec{u} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y), \vec{v} = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ forment une base $(\vec{u},\vec{v})$ de sens direct, et on définit le vecteur normal en M à S par $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$. Calculer ce dernier vecteur. En déduire le plan tangent Π_M.

On dira que deux arcs de classe C^1 réguliers, à supports contenus dans celui de S et passant par M font en ce point un angle θ si leurs vecteurs tangents en M font entre eux l'angle θ dans le plan orienté Π_M .

3. Soit γ un arc de classe C^1 , régulier à support contenu dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, et Γ l'arc $F \circ \gamma$. Calculer la dérivée de l'abscisse curviligne s de Γ en fonction de celle de l'abscisse curviligne de γ .

4. Soient γ_1 , γ_2 deux arcs de classe C^1 réguliers à supports dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ ayant un point commun A . Montrer que l'angle des arcs images $\Gamma_1 = F(\gamma_1)$ et $\Gamma_2 = F(\gamma_2)$ au point $F(A)$ est le même que celui que font γ_1 et γ_2 en A .
Interpréter ce résultat par une propriété de la matrice jacobienne de F au point (x,y) .

5. Déterminer en utilisant les résultats de la section I des arcs $\Gamma \subset S$ de classe C^1 qui font avec les demi-droites de S un angle constant.

III

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 , et $\varphi : s \in I \longmapsto \varphi(s) \in \mathbb{R}^2$ un arc de classe C^∞ ayant les propriétés suivantes :
(a) φ est injectif sur I .
(b) s est une abscisse curviligne pour l'arc φ .
(c) pour tout $s \in I$, $\varphi'(s)$ et $\varphi''(s)$ sont indépendants.
On note alors :
$\vec{t}(s)$ le vecteur unitaire tangent
$\vec{n}(s)$ le vecteur unitaire normal faisant avec $\vec{t}(s)$ l'angle $+\frac{\pi}{2}$
$\rho(s)$ la courbure de l'arc φ au point $\varphi(s)$.

Soit de même $\varphi_1 : s \in I \longmapsto \varphi_1(s) \in \mathbb{R}^3$ un arc de l'espace, de classe C^∞ ayant les propriétés (a), (b) et (c), $\vec{t}_1(s), \vec{n}_1(s), \rho_1(s)$ désignant respectivement le vecteur unitaire tangent, le vecteur unitaire normal principal, et la courbure en $\varphi_1(s)$ à cet arc (on rappelle que l'on a $\rho_1 \vec{n}_1 = \varphi_1''$) .

1. On associe à φ l'application :
$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(s,\lambda) = \varphi(s) + \lambda \vec{n}(s)$.
Calculer la différentielle de f en fonction de $\vec{t}, \vec{n}$ et ρ . En quels points n'est-elle pas un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même ?

2. Soit $\vec{u} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ une application C^∞ telle que pour tout $s \in I$, $\vec{u}(s)$ est un vecteur unitaire orthogonal à $\vec{t}_1(s)$. On associe au couple $(\varphi_1, \vec{u})$ l'application
$g : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(s,\lambda) = \varphi_1(s) + \lambda \vec{u}(s)$. Montrer que les deux dérivées partielles de g en (s,λ) sont des vecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$.

3. On suppose désormais qu'il existe un intervalle ouvert $]a,b[\subset \mathbb{R}$ contenant 0 , tel que sur l'ouvert $D = I \times]a,b[$ les applications f, g sont injectives et que pour tout $(s,\lambda) \in D$ la différentielle $df_{(s,\lambda)}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.
On dira que la nappe paramétrée S_1 définie par g est développable, si pour toute application C^∞ , $\ell : I \to]a,b[$, les arcs $\psi : I \to \mathbb{R}^2$ défini par $\psi(s) = f(s, \ell(s))$ et $\psi_1 : I \to \mathbb{R}^3$ défini par $\psi_1(s) = g(s, \ell(s))$ ont les différentielles de leurs abscisses curvilignes égales, aux points correspondants.
(i) Montrer que S_1 est développable si et seulement si on a $\vec{u}'(s) = -\rho_1(s)\vec{t}_1(s)$ pour tout $s \in I$.
(ii) Montrer que si S_1 est développable, alors pour tout s fixé dans I le plan tangent à S_1 est le même en tout point de la portion de droite $g(\{s\} \times]a,b[)$.

IV

Soit S la nappe paramétrée définie par
$g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(\alpha, t) \mapsto (\cos\alpha - \frac{t}{\sqrt{2}} \sin\alpha \ , \ \sin\alpha + \frac{t}{\sqrt{2}} \cos\alpha \ , \ \frac{t}{\sqrt{2}})$.

1. Montrer que S est une quadrique dont on précisera l'équation cartésienne et la nature.

2. Déterminer le plan tangent $H(\alpha, t)$ au point $g(\alpha, t)$ de S . Prouver que toute droite contenue dans S appartient à un plan tangent. En déduire que S n'est pas développable en utilisant la propriété du III.3.(ii).